

MAI 1 – domácí úkol (ze cvičení) 13 – určitý integrál

Příklady k promyšlení (a pište otázky), a pokud chcete, tak si něco vyberte a sepište jako domácí úkol 14.

Výpočet R -integrálu integrací per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_{-1}^1 \arcsin^2(x) dx; \quad \int_2^3 \frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x} dx; \quad \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx; \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx \quad (\text{substituce } \operatorname{tg}(x)=t)$$

A několik příkladů aplikace určitého integrálu:

1. a) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω , je-li ω ohraničená grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 2 - x$ a osou x .
- b) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω , je-li ω ohraničená grafy funkcí $y = x^2$, $y = x \sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$.

2. a) Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x , kde

$$\omega = \left\{ [x, y]; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x \right\}.$$

- b) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω kolem osy x , kde oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y = x e^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

3. a) Určete délku grafu funkce $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq a$.

- b) Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

(„tahák“: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, x \in \mathbb{R}$);

- c) Určete délku grafu funkce $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

A můžete zkusit ještě další užití věty o substituci a vlastností R -integrálu:

Ukažte, že platí :

1. Je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$, f je funkce lichá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
2. Je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$, f je funkce sudá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
3. Je-li f spojitá a sudá v intervalu $[-a, a]$ ($a > 0$), pak primitivní funkce je v intervalu $(-a, a)$ lichá.
4. Je-li f spojitá a sudá v intervalu $[-a, a]$ ($a > 0$), pak $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$.
5. Bez výpočtu integrálu ukažte, že

$$\text{a) } \int_{-1}^2 (e^x - e^{-x}) dx > 0; \quad \text{b) } \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{x} dx = 0, \quad (a > 0).$$